Apellido paterno:	**Apellido materno:**	**Nombre:**

Pregunta 1	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Pregunta 4**	**Total**	**Nota**

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \frac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[15 ptos.]** Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{\cot(\ln x)}{x}\, dx$$

2) **[15 ptos.]** Calcular

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-16}}$$

3) **[15 ptos.]** Encontrar la función F que satisface la ecuación

$$F'(x) = \frac{x}{e^x}$$

y cumple la condición $F(0) = 0$.

4) **[15 ptos.]** Integre

$$\int \frac{dx}{8 - 4\sin + 7\cos x}$$

Solución:

1) Usando método de sustitución considerando $u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\, dx$ tenemos que

$$\int \frac{\cot(\ln x)}{x}\, dx \quad = \quad \int \cot(u)\, du \quad = \quad \int \frac{\cos(u)}{\sin(u)}\, du$$

con una nueva sustitución $v = \sin u \to dv = \cos u\, du$ obtenemos una integral de la forma

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(u)}{\sin(u)}\, du &= \int \frac{1}{v}\, dv \\
&= \ln|v| + C \\
&= \ln|\sin u| + C \\
&= \ln|\sin(\ln x)| + C
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int \frac{\cot(\ln x)}{x}\, dx \quad = \quad \ln|\sin(\ln x)| + C\,.$

2) Consideremos primero la sutitución $u = 2x$ (ó $x = \frac{u}{2}$) $\to du = 2\, dx$ (ó $\frac{du}{2} = dx$) y tenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 16}} \quad = \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{(2x)^2 - 4^2}} \quad = \quad \int \frac{du/2}{u/2\sqrt{u^2 - 4^2}}$$

ahora, la sustitución trigonométrica $u = 4\sec\theta \to du = 4\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta$ nos lleva a

$$\begin{aligned}
\int \frac{du/2}{u/2\sqrt{u^2 - 4^2}} &= \int \frac{4\sec\theta\, \tan\theta}{4\sec\theta\sqrt{16\,\sec^2\theta - 16}}\, d\theta \\
&= \int \frac{\tan\theta}{4\sqrt{\tan^2\theta}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int d\theta \quad = \quad \frac{1}{4}\theta + C \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 16}} = \frac{1}{4}\operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

3) Claramente F es la antiderivada de $\dfrac{x}{e^x}$, es decir $F(x) = \displaystyle\int x\, e^{-x}\, dx$. Considerando integración por partes con $u = x \to du = dx$ y $dv = e^{-x}\, dx \to v = -e^{-x}$, nos da

$$\begin{aligned} F(x) &= -x\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx \\ &= -x\, e^{-x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

La condición $F(0) = 0$ nos leva a $-e^0 + C = 0 \Rightarrow C = 1$. Por lo tanto, la función buscada es

$$F(x) = -e^{-x}(x+1) + 1$$

.

4) Sabemos que la sustitución $u = \tan(x/2)$ nos lleva a considerar

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,, \quad dx = \frac{2\, du}{1+u^2}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{8 - 4\sin + 7\cos x} &= \int \frac{\frac{2\,du}{1+u^2}}{8 - \frac{8u}{1+u^2} + \frac{7(1-u^2)}{1+u^2}} \\ &= \int \frac{\frac{2\,du}{1+u^2}}{\frac{(1+u^2)8 - 8u + 7(1-u^2)}{1+u^2}} \\ &= \int \frac{2}{u^2 - 8u + 15} du \\ &= \int \frac{2}{(u-5)(u-3)}\, du \end{aligned}$$

separando el integrando en fracciones parciales, tenemos

$$\frac{2}{(u-5)(u-3)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u-3} = \frac{(A+B)u + (-3A-5B)}{(u-5)(u-3))}$$

obteniendo $\begin{array}{c} A + B = 0 \\ -3A - 5B = 2 \end{array} \implies \begin{array}{c} A = 1 \\ B = -1 \end{array}$

entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(u-5)(u-3)}\,du &= \int \frac{du}{u-5} - \int \frac{du}{u-3} \\ &= \ln|u-5| - \ln|u-3| + C \\ &= \ln\left|\frac{u-5}{u-3}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{\tan(x/2)-5}{\tan(x/2)-3}\right| + C.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\sin+7\cos x} \quad = \quad \ln\left|\frac{\tan(x/2)-5}{\tan(x/2)-3}\right| + C.$